Scriptum 3

Mathematisch Centrum

2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam.

SUR LES FONCTIONS SYMETRIQUES

J.G.van der Corput.

Scriptum 3

SUR LES FONCTIONS SYMETRIQUES

J.G. van der Corput.

Considérons m quantités indéfinies $z_1, \dots, z_m$ et leurs fonctions symétriques élémentaires

$$a_1 = \sum z_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_m;$$
$$a_2 = \sum z_1 z_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_m + z_2 z_3 + \dots + z_{m-1} \cdot z_m;$$
$$(1) \quad a_3 = \sum z_1 z_2 z_3; \qquad \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m-1} = \sum z_1 z_2 \dots z_{m-1} = z_1 z_2 \dots z_{m-1} + \dots + z_2 z_3 \dots z_m$$
$$a_m = z_1 z_2 \dots z_m$$

Ces sommes sont composées respectivement de $\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \dots \binom{m}{m-1}$ termes. Posons $a_h = 0$ pour $h > m$.

Considérons en outre les sommes

$$\sum z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$$

où les exposants désignent des entiers ≥ 0, dont on obtient tous les termes en permutant les m exposants $k_1 \dots k_m$ de toutes les manières possibles. J'appelle une telle somme une somme simple. Le nombre des termes de cette somme est égal à

$$\frac{m!}{j_1'! \; j_2'! \dots j_v'!}$$

si le système formé par les exposants contient j_1'

nombres égaux, j_2' nombres égaux différents des j_1' nombres déjà mentionnés, j_3' nombres égaux différents des $j_1' + j_2'$ nombres déjà mentionnés,.... finalement j_v' nombres égaux différents des $j_1' + \ldots$ $\ldots + j_{v-1}'$ nombres déjà mentionnés, de telle manière qu'on ait $j_1' + \ldots + j_v' = m$. Par exemple pour $m = 4$ la somme simple $\sum z_1^3 z_2^3 z_3 z_4$ est composée de $\frac{24}{2.2} =$ $= 6$ termes.

Je poserai $\{k_1, \ldots, k_r\}$, où r désigne un nombre naturel $\leqq m$ et où les nombres $k_1, \ldots, k_r$ sont entiers et positifs, égale à la somme simple

$$\sum z_1^{k_1} \ldots z_r^{k_r} \; z_{r+1}^0 \; \ldots . z_m^0 \, .$$

Cette somme est composée de $\dfrac{m!}{j_1! \ldots j_u! \, (m-r)!}$

termes, si le système formé par les exposants positifs $k_1, \ldots, k_r$ contient j_1 nombres égaux, j_2 nombres égaux différents des j_1 nombres déjà mentionnés .... finalement $j_1 + \ldots + j_u$ nombres égaux différents des $j_1 + \ldots + j_{u-1}$ nombres déjà mentionnés de telle manière qu'on ait $j_1 + \ldots + j_u = r$.

Une somme simple est une fonction entière rationnelle symétrique de $z_1, \ldots, z_m$ et peut donc être écrite comme une fonction entière rationnelle de $a_1, \ldots, a_m$. Par exemple

(2) $$\{2\} = a_1^2 - 2a_2$$

(3) $$\{4,2\} = a_1^2 \, a_2^2 - 2a_1^3 \, a_3 - 2a_2^3 + 4a_1 a_2 a_3 + 2a_1^2 \, a_4 - 3a_3^2 + 2a_2 a_4 - 6a_1 a_5 + 6a_6$$

et

(4) $\{2\}\{2\} - \{4\} = 2a_2^2 - 4a_1 a_3 + 4a_4$.

Introduisons l'opérateur différentiel

$$[k_1, \ldots, k_r] = \frac{1}{j_1! \ldots j_u!} \sum_{\mu_1 = k_1}^{m} \ldots \sum_{\mu_r = k_r}^{m} a_{\mu_1 - k_1} \ldots$$

$$\ldots a_{\mu_r - k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \ldots \partial a_{\mu_r}}$$

où $k_1, \ldots, k_r$ sont des entiers positifs, tous $\leqq m$ où $j_1, \ldots, j_u$ ont la signification indiquée ci-dessus et où $a_0 = 1$. Cet opérateur peut être appliqué à chaque fonction entière rationnelle de $a_1, \ldots, a_m$. Si au moins un des entiers $k_1, \ldots, k_m$ est supérieur à m, on conviendra que l'opérateur $[k_1, \ldots, k_m]$ est l'opérateur nul, c'est-à-dire l'opérateur qui rend indentiquement nulle toute fonction entière rationnelle de $a_1, \ldots, a_m$.

L'opérateur $[k_1, \ldots, k_r]$ peut être appliqué, non seulement aux fonctions rationnelles de $a_1, \ldots, a_m$, mais même aux fonctions rationnelles contenant $a_1, \ldots, a_m$ et des sommes simples. Dans ce cas chaque somme simple doit être remplacée d'abord par la fonction entière rationnelle de $a_1, \ldots, a_m$, qui lui est égale pour toutes les valeurs de m. Par exemple $\{4,2\}$ doit être remplacée par le membre de droite de (3). Si m est inférieur à 6, cette somme simple $\{4,2\}$ est aussi égale à

$a_1^2 a_2^2 - 2a_1^3 a_3 - 2a_2^3 + 4a_1 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_4 - 3a_3^2 + 2a_2 a_4 - 6a_1 a_5$

où le terme $6a_6$ manque, mais même dans ce cas on ne doit pas remplacer $\{4,2\}$ par cette expression, parcequ'elle ne représente pas la somme $\{4,2\}$ pour toutes les valeurs de m, puisqu'il y manque le terme $6a_6$. Par exemple

$$[1]\{2\} = [1]\ (a_1^2 - 2a_2) = 2a_1 - 2a_1 = 0.$$

Les opérateurs suivants sont les plus importants:

$$(5)\quad \begin{cases} A_1 = [1] = \frac{1}{1!} \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu-1} \frac{\partial}{\partial a_\mu}\ ; \\ A_2 = [1,1] = \frac{1}{2!} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} a_{\mu-1}\, a_{\nu-1} \frac{\partial^2}{\partial a_\mu \partial a_\nu} \\ A_3 = [1,1,1] = \frac{1}{3!} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\rho=1}^{m} a_{\mu-1}\, a_{\nu-1}\, a_{\rho-1} \frac{\partial^3}{\partial a_\mu \partial a_\nu \partial a_\rho} \end{cases}$$

etc.

Ces opérateurs interviennent dans le théorème suivant.

Théorème 1

L'opérateur A_k, appliqué à une somme simple $(k_1, \ldots, k_r)$ la rend identiquement nulle si k ne figure pas dans le système des exposants de la somme simple. Si k figure dans ce système on obtient le résultat en remplaçant dans la somme simple r par r-1 et en supprimant un nombre k dans le système des exposants [1]).

Par exemple
$$\begin{cases} A_1 \{4,2\} = 0; \\ A_4 \{4,2\} = \{2\}; \\ A_4 \{4,4,4,3,2\} = \{4,4,3,2\}. \end{cases}$$

---

[1]) On trouve le cas particulier k=1 de ce théorème dans J.G.v.d.Corput, Symmetrische functies, Christiaan Huygens 18 (1940), p. 251-277.

A cause de ce théorème j'appelle A_k l'opérateur supprimant k (en anglais: the k-canceling operator; en hollandais: de k-schrapper).

En outre nous démontrerons le théorème suivant d'isomorphie:

<u>Théorème 2.</u>

Soit donnée une identité entière rationnelle contenant les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et des sommes simples. Cette identité reste valable si l'on remplace les nombres $a_1, \ldots, a_m$ par les opérateurs $A_1, \ldots, A_m$ et en outre chaque somme simple $\{k_1, \ldots, k_r\}$ par l'opérateur correspondant $[k_1, \ldots, k_r]$.

Par exemple il suit de (2), (3) et (4) que

$$[2] = A_1^2 - 2A_2;$$
$$[4,2] = A_1^2A_2^2 - 2A_1^3A_3 - 2A_2^3 + 4A_1A_2A_3 + 2A_1^2A_4 - 3A_3^2 + \tag{5}$$
$$+ 2A_2A_4 - 6A_1A_5 + 6A_6 \quad \text{et}$$
$$[2][2] - [4] = 2A_2^2 - 4A_1A_3 + 4A_4.$$

Les formules (1) entraînent (5).

Supposons que $k_1, \ldots, k_r$, $l_1, \ldots, l_t$ soient des entiers positifs tel qu'on ait $k_1 + \ldots + k_r = l_1 + \ldots + l_t$. On a

$$[k_1, \ldots, k_r]\, a_{l_1} a_{l_2} \ldots a_{l_t} = 1, \tag{6}$$

si r=t et si les systèmes $(k_1, \ldots, k_r)$ et $(l_1, \ldots, l_t)$ sont les mêmes, peut-être à l'ordre près. Dans tous les autres cas le résultat s'annule. En effet, le membre de gauche de (6) est égal à

$$\frac{1}{j_1! \ldots j_u!} \sum_{\mu_1 = k_1}^{m} \cdots \sum_{\mu_r = k_r}^{m} \frac{\partial^r a_{l_1} \ldots a_{l_t}}{\partial a_{\mu_1} \ldots \partial a_{\mu_r}} \tag{7}$$

Il suffit de considérer dans cette somme les termes dans lesquels le système $(\mu_1,\ldots,\mu_r)$ est un système partiel du système $(l_1,\ldots,l_t)$, puisque les autres termes s'annulent. En vertu de

$$(8)\ \mu_1 \geqq k_1\,;\ldots;\ \mu_r \geqq k_r\,;\ \mu_1+\ldots+\mu_r \geqq k_1+\ldots+k_r = \\ = l_1+\ldots+l_t\,,$$

on trouve que dans tous ces termes les systèmes $(\mu_1,\ldots,\mu_r)$ et $(l_1,\ldots,l_t)$ sont les mêmes peut-être à l'ordre près. On obtient donc

$$\mu_1+\ldots+\mu_r = l_1+\ldots+l_t = k_1+\ldots+k_r$$

d'où il suit à cause de (8) que

$$\mu_1 = k_1\,,\ldots,\ \mu_r = k_r\,.$$

Ainsi on trouve que tous les termes figurant dans la somme (7) s'annulent, si les systèmes $(k_1,\ldots,k_r)$ et $(l_1,\ldots,l_t)$ ne sont pas les mêmes. Si ces deux systèmes sont les mêmes, on a

$$(9)\quad [k_1,\ldots,k_r]\, a_{l_1},\ldots,\ a_{l_t} = \frac{1}{j_1!\ldots j_u!}\,\frac{\partial^r a_{k_1}\ldots a_{k_r}}{\partial a_{k_1}\ldots\partial a_{k_r}}$$

Le dernier facteur peut être écrit comme un produit de u facteurs, dont chacun a la forme

$$\frac{\partial^j (a_k^j)}{\partial a_k^j} = j!\,,$$

si k figure exactement j fois dans le système $(k_1,\ldots,k_r)$. Par conséquent le membre de droite de (9) est égal à

$$\frac{j_1!\cdots j_u!}{j_1!\cdots j_u!} = 1.$$

Le résultat, ainsi démontré, nous montre encore plus. Toute somme simple $\{k_1,\ldots,k_r\}$ peut être écrite comme une somme de termes de la forme $ca_{l_1}\ldots a_{l_t}$, où $l_1+\ldots+l_t = k_1+\ldots+k_r$ et où c désigne une constante. Je dis que le coefficient c est égal à $[l_1,\ldots l_t]\{k_1,\ldots,k_r\}$. Car l'opérateur $[l_1,\ldots,l_t]$, appliqué à la somme simple $\{k_1,\ldots k_r\}$, donne la contribution c à cause du terme $ca_1^{l_1}\ldots a_t^{l_t}$ tandis que la contribution des autres termes est égale à zéro.

Si $k_1,\ldots,k_r$, $l_1,\ldots,l_t$ sont des entiers positifs tels qu'on ait $k_1+\ldots+k_r = l_1+\ldots+l_t$, on a la loi commutative

$$[k_1,\ldots,k_r]\{l_1,\ldots,l_t\} = [l_1,\ldots,l_t]\{k_1,\ldots,k_r\}.$$

Autrement dit *): si l'on écrit les sommes simples $\{k_1,\ldots,k_r\}$ et $\{l_1,\ldots,l_t\}$ comme fonctions rationnelles symétriques de a_1, $a_2,\ldots$ le coefficient de

---

*) Cette remarque a été faite déjà par Cayley. Cf G.Salmon, Modern higher algebra 4ième édition, 1885, p. 356;

J.G.v.d.Corput, Christiaan Huygens 18 (1911) 257.

Ce livre de Salmon contient les tables des fonctions symétriques de dégré ≤ 10, écrites comme fonctions entières rationnelles de a_1, $a_2,\ldots$

$a_{l_1} \dots a_{l_t}$ dans le développement de $[k_1, \dots, k_r]$ est égal au coefficient de $a_{k_1}, \dots a_{k_r}$ dans le développement de $\{l_1, \dots, l_t\}$.

Pour la démonstration de cette loi j'introduis non seulement les quantités indéfinies $z_1, \dots, z_m$, mais aussi de nouvelles quantités indéfinies $w_1, \dots, w_n$ et je pose

$$(w-w_1)\dots(w-w_n) = w^n - b_1 w^{n-1} \dots \pm b_n$$

Alors on a

$$\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\nu=1}^{n}(1-z_\mu w_\nu) = z_\mu^n \prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{z_\mu} - w_\nu\right) =$$

$$= \prod_{\mu=1}^{m}\left(1 - b_1 z_\mu + \dots \pm b_n z_\mu^{n-1}\right) \dots$$

Le membre de droite peut être écrit comme une fonction entière rationnelle de $b_1, \dots, b_n$ et dans ce polynome le coefficient de $(-)^{k_1+\dots+k_r} b_{k_1} \dots b_{k_r}$ est égal à la somme simple

$$\{k_1, \dots, k_r\} = \sum a_{l_1} \dots a_{l_t} \; [l_1, \dots, l_t]\{k_1, \dots, k_r\}.$$

Ainsi on trouve

$$\prod_{\nu=1}^{n}\prod_{\mu=1}^{m}(1-z_\mu w_\nu) = \sum (-)^{k_1+\dots+k_r} a_{l_1} \dots a_{l_t} b_{k_1} \dots b_{k_r} [l_1 \dots l_t]\{k_1 \dots k_r\},$$

où la somme est étendue aux systémes formés par les entiers positifs $k_1, \dots, k_r$, $l_1, \dots, l_t$, avec

$$k_1 + \dots + k_r = l_1 + \dots + l_t.$$

En échangeant les systèmes $z_1, \dots, z_n$ et $w_1, \dots, w_n$ on trouve la loi commutative. Après ces remarques préliminaires il est facile de démontrer le théorème 1. Ce théorème est évident dans le cas particulier $r=1$ et $k_1=1$, puisqu'alors on a

$$\{k_1 \dots k_r\} = \{1\} = \sum z_1 = a_1$$

et

$$A_k a_1 = 1 \text{ ou } 0 \text{ selon que } k=1 \text{ ou } k>1.$$

Dans la démonstration nous pouvons donc supposer que $k_1+\dots+k_r > 1$ et que le théorème a été déjà démontré, si l'on remplace $k_1+\dots+k_r$ par un plus petit entier positif. Puisque A_k est un opérateur differentiel d'ordre k, on peut écrire $A_k\{k_1, \dots, k_r\}$ comme une somme de termes de la forme $c\{m_1, \dots, m_q\}$, où $m_1+\dots+m_q = k_1+\dots+k_r-k$. Donc

(10) $\qquad A_k\{k_1, \dots, k_r\} = \sum c\{m_1, \dots, m_q\}.$

Si l'on applique l'opérateur $A_{m_1} \dots A_{m_q}$ à cette relation, la contribution du terme $c\{m_1, \dots, m_q\}$ est égale à c d'après notre hypothèse d'induction, tandis que la contribution des autres termes s'annule. Par conséquant le coefficient c figurant dans le membre de droite de (10) est égal à

$$A_{m_1} \dots A_{m_q} A_k \{k_1, \dots, k_r\},$$

donc d'après la loi commutative égal à

$$[k_1 \dots k_r]\, a_{m_1} \dots a_{m_q} a_k .$$

D'après le raisonnement donné ci-dessus, ce résultat est égal à 1, si les systèmes $(k_1,\dots,k_r)$ et $(m_1,\dots,m_q,k)$ sont les mêmes, peut-être à l'ordre près tandis que ce résultat s'annule dans tous les autres cas. Par conséquent tous les termes figurant dans le membre de droite de (10) s'annulent, si k ne figure pas dans le système $k_1,\dots,k_r$. Si par contre k figure dans ce système, le membre de droite de (10) est composé d'un seul terme $\{m_1,\dots,m_q\}$, où $q=r-1$; on obtient ce système $m_1,\dots,m_q$ en supprimant le nombre k dans le système $\{k_1,\dots k_r\}$. Ainsi le théorème 1 est démontré. Avant de passer à la démonstration du théorème d'isomorphie, nous donnons d'abord quelques applications du théorème 1.

La théorie générale donne

$$(11)\qquad \begin{aligned} \sum z_1^4 z_2^2 = {} & p_1 a_1^2 a_2^2 + p_2 a_2^3 + p_3 a_1^3 a_3 + p_4 a_1 a_2 a_3 + \\ & + p_5 a_3^2 + p_6 a_1^2 a_4 + p_7 a_2 a_4 + p_8 a_1 a_5 + \\ & + p_9 a_6 . \end{aligned}$$

Le membre de droite contient tous les termes de poids 6, excepté les termes en a_1^6 et en $a_1^4 a_2$ qui ne peuvent pas figurer, puisque le développement de $(\sum z_1)^6$ et de $(\sum z_1)^4 \sum z_1 z_2$ fournit les termes z_1^6 et $z_1^5 z_2$ qui ne figurent pas dans le membre de gauche. En développant $p_1 (\sum z_1)^2 (\sum z_1 z_2)^2$ nous obtenons le terme $p_1 z_1^4 z_2$, d'où il suit que $p_1 = 1$. Je me pose maintenant la question: est-il possible de déterminer les autres coefficients $p_2,\dots,p_9$ d'une manière facile?

D'après le théorème 1 l'opérateur supprimant 1, appliqué au membre de gauche de (11) le rend identiquement nul; d'où il suit

$$(2p_1+p_3)a_1^3a_2+(2p_1+3p_2+p_4)a_1a_2^2+(3p_3+p_4+p_6)a_1^2a_3$$
$$+(p_4+2p_5+p_7)a_2a_3+(2p_6+p_7+p_8)a_1a_4+$$
$$+(p_8+p_9)a_5.$$

Cette expression s'annule pour chaque choix des nombres $a_1,\dots,a_5$, donc

$$2p_1+p_3=0;\ 2p_1+3p_2+p_4=0;\ 3p_3+p_4+p_6=0;$$
$$p_4+2p_5+p_7=0;\ 2p_6+p_7+p_8=0;\ p_8+p_9=0.$$

Ces relations linéaires ne permettent pas de calculer les coefficients $p_2,\dots,p_9$, mais nous trouvons de nouvelles relations au moyen d'autres opérateurs. Le théorème d'isomorphie transforme

$$\sum z_1^3=a_1^3-3a_1a_2+3a_3$$

en

$$[3]=A_1^3-3A_1A_2+3A_3.$$

Cet opérateur appliqué à $\sum z_1^4z_2^2$ donne le même résultat que $3A_3$, puisque $A_1(\sum z_1^4z_2^2)\equiv 0$.
On trouve ainsi:

$$(p_3+p_6)a_1^3+(p_4+p_7+p_8)a_1a_2+(2p_5+p_9)a_3=0$$

Continuant ainsi on obtient assez de relations nécessaires pour l'évaluation des coefficients $p_2,\dots,p_9$.

Si l'on veut déduire la formule pour $\sum z_1^3z_2z_3z_4$ de la relation

$$\sum z_1^3z_2z_3=a_1^2a_3-2a_2a_3-a_1a_4+5a_5,$$

il suffit d'appliquer l'opérateur supprimant 1 à

$$(12) \quad \sum z_1^3 z_2 z_3 z_4 = q_1 a_1^2 a_4 + q_2 a_2 a_4 + q_3 a_1 a_5 + q_4 a_6 ;$$

le membre de droite ne contient pas le terme en a_1^6, puisque le développement $(\sum z_1)^6$ donne entre autres un terme z_1^6 qui ne figure pas dans le membre de gauche et d'une manière analogue on trouve qu'aucun des termes en $a_1^4 a_2$, $a_1^2 a_2^2$, $a_1^3 a_3$, a_2^3, $a_1 a_2 a_3$, a_3^2 ne peut figurer dans le membre de droite de (12).

En appliquant à (12) l'opérateur A_1 on trouve

$$a_1^2 a_3 - 2a_2 a_3 - a_1 a_4 + 5a_5 = \sum z_1^3 z_2 z_3 = A_1 \sum z_1^3 z_2 z_3 z_4 =$$
$$= q_1 a_1^2 a_3 + q_2 a_2 a_3 + (2q_1 + q_2 + q_3) a_1 a_4 + (q_3 + q_4) a_5$$

d'où il suit

$$q_1 = 1 \ ; \ q_2 = -2 ; \ q_3 = -1 \text{ et } q_4 = 6.$$

De la définition de l'opérateur A_1 il découle immédiatement que

$$A_1(FG) = FA_1(G) + GA_1(F),$$

où F et G désignent deux fonctions entières rationnelles de $a_1, \ldots, a_m$ et de sommes simples. De ce résultat il suit que, si F est une fonction entière rationnelle de sommes simples dont aucun ne contient dans son sytème d'exposants le nombre 1, on a $A_1(F) = 0$.

Par exemple on peut écrire

$$3(\sum z_1^3)^2 + 4(\sum z_1^2)^3 - (\sum z_1^4)(\sum z_1^2) + \sum z_1^6$$

comme une fonction entière rationnelle de $a_1, a_2, \ldots$

de la forme

$$u_1 a_1^6 + u_2 a_1^4 a_2 + u_3 a_1^3 a_3 + u_4 a_1^2 a_2^2 + u_5 a_1^2 a_4 + u_6 a_1 a_2 a_3 +$$
$$+ u_7 a_1 a_5 + u_8 a_2^3 + u_9 a_2 a_4 + u_{10} a_6 .$$

L'opérateur A_1 rend cette expression identiquement nulle, et nous obtenons 7 relations linéaires entre les coefficients $u_1, \ldots, u_{10}$.

On peut appliquer ces opérateurs à la découverte d'identités, et par exemple je traiterai les formules connues de Newton qui peuvent être obtenues au moyen de l'opérateur A_1. Puisque $z_1, \ldots, z_m$ satisfont à l'équation

$$z^m - a_1 z^{m-1} + \ldots \pm a_m = 0,$$

on trouve par addition

$$(13) \qquad \sum z_1^m - a_1 \sum z_1^{m-1} + \ldots \pm m a_m = 0$$

en vertu de

$$A_1 a_h = a_{h-1} \qquad (h=1,\ldots,m)$$

on obtient

$$A_1(a_h \sum z_1^t) = a_{h-1} \sum z_1^t \qquad \text{si } t \neq 1$$
$$= a_{h-1} \sum z_1^t + a_h \quad \text{si } t=1$$

Par conséquant A_1 transforme (13) en

$$+ \sum z_1^{m-1} - a_1 \sum z_1^{m-2} \ldots \pm a_{m-2} \sum z_1 \mp (m-1) a_{m-1} = 0.$$

En appliquant de nouveau l'opérateur supprimant 1 nous trouvons

$$\sum z_1^{m-2} - a_1 \sum z_1^{m-3} + \ldots \pm (m-2) a_{m-2} = 0 .$$

Continuant ainsi nous obtenons pour $h=1,\ldots,m-1$

les formules de Newton

$$\sum z_1^{m-h} - a_1 \sum z_1^{m-h-1} + \dots \mp a_{m-h-1} \sum z_1 + \pm (m-h) a_{m-h} = 0 .$$

Dans le théorème d'isomorphie interviennent des sommes simples $\{k_1, \dots, k_r\}$, dont le nombre des termes est égal à $\frac{m!}{j_1! \dots j_u! (m-r)!}$; dans cette formule $j_1, \dots, j_u$ ont la signification indiquée ci-dessus. J'appelle le produit $\{k_1, \dots, k_r\}^* = j_1! \dots j_u! \{k_1, \dots, k_r\}$ une somme complète. Cette somme peut être écrite sous la forme

$$\sum z_{x_1}^{k_1} \dots\dots z_{x_r}^{k_r} ,$$

étendue à tous les systèmes $(x_1, \dots, x_r)$ formés par entiers positifs différents, tous $\leqq m$. En effet, ces deux sommes symétriques contiennent les mêmes termes et de chacune d'elles le nombre des termes est égal à $\frac{m!}{(m-r)!}$.

Si h est un entier positif quelconque il est immédiatement clair qu'on peut écrire le produit $\{h\}\{k_1, \dots, k_r\}^*$ comme une somme de $r+1$ sommes complètes; la première de ces sommes est égale à $\{h, k_1, \dots, k_r\}^*$, la deuxième égale à $\{k_1 + h, k_2, \dots, k_r\}^*$, et finalement la dernière égale à $\{k_1, \dots, k_r + h\}^*$.

Donc,

$$\{h\}\{k_1, \dots, k_r\}^* = S_0 + S_1 + \dots + S_r . \tag{14}$$

Je dis que cette relation reste valable si l'on remplace toute somme complète par l'opérateur différentiel correspondant. Dans cette substitution on remplace la somme complète $\{k_1, \ldots, k_r\}^*$ par l'opérateur

$$j_1! \ldots j_u! \, [k_1, \ldots, k_r] = \sum_{\mu_1=k_1}^{m} \ldots \sum_{\mu_r=k_r}^{m} a_{\mu_1-k_1} \ldots$$

$$\ldots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \cdots \partial a_{\mu_r}}$$

Cette substitution transforme le membre de gauche de (14) en

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_{\mu-h} \frac{\partial}{\partial a_\mu} \sum_{\mu_1=k_1}^{m} \ldots \sum_{\mu_r=k_r}^{m} a_{\mu_1-k_1} \ldots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \cdots \partial a_{\mu_r}} \, .$$

On peut écrire cet opérateur comme une somme de $r + 1$ opérateurs. Le premier de ces opérateurs est égal à

$$\sum_{\mu=h}^{m} \sum_{\mu_1=k_1}^{m} \ldots \sum_{\mu_r=k_r}^{m} a_{\mu-h} \, a_{\mu_1-k_1} \ldots$$

$$\ldots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^{r+1}}{\partial a_\mu \, \partial a_{\mu_1} \cdots \partial a_{\mu_r}}$$

donc exactement égal à l'opérateur correspondant à la somme complète $S_0 = \{h, k_1, \ldots, k_r\}$. On obtient le deuxième opérateur en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial a_\mu}$ au facteur $a_{\mu_1-k_1}$. Le résultat de ce dernier opérateur est égal à 1 , si $\mu_1 = \mu \mp k_1$ et égal à zéro dans tous les autres cas. Par conséquent l'opérateur en question est égal à

$$\sum_{\mu_1=k_1+h}^{m} \sum_{\mu_2=k_2}^{m} \cdots \sum_{\mu_r=k_r}^{m} a_{\mu_1-k_1-h} \cdots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \partial a_{\mu_2} \cdots \partial a_{\mu_r}}$$

donc exactement égal à l'opérateur correspondant à la somme complète

$$S_1 = \{k_1 + h, k_2, \ldots, k_r\}.$$

De la même manière on trouve encore r-1 autres opérateurs correspondant respectivement à $S_2, \ldots, S_r$.

J'écrirai le résultat obtenu sous une autre forme, savoir:

On peut écrire le produit $\{h\}\{k_1, \ldots, k_r\}$ comme une somme de sommes simples et l'identité trouvée ainsi reste valable si l'on remplace chaque somme simple par l'opérateur differentiel correspondant.

En répétant ce raisonnement, on obtient: On peut écrire le produit $\{k_1\}\{k_2\} \ldots \{k_s\} \cdot \{k_1, \ldots, k_r\}$ comme une somme de sommes simples et l'identité trouvée ainsi reste valable si l'on remplace toute somme simple par l'opérateur différentiel correspondant. Puisque toute somme simple peut être écrite comme une somme de produits de la forme $k_1 \; k \; \ldots k_s$ nous avons démontré:

On peut écrire le produit de deux sommes simples comme une somme de sommes simples et l'identité trouvée ainsi reste valable si l'on remplace chaque somme simple par l'opérateur différentiel correspondant.

En répétant ce raisonnement on trouve le même résultat pour un produit de trois ou plusieurs sommes simples, d'où résulte le résultat suivant: Si F est une fonction entière rationnelle de sommes simples on peut écrire F comme la somme de sommes simples; l'identité trouvée ainsi, reste valable si l'on remplace toute somme simple par l'opérateur différentiel correspondant.

Considérons finalement une fonction entière rationnelle $F = 0$, qui contient les nombres $a_1, \ldots, a_m$ et des sommes simples. Parceque $a_1, \ldots, a_m$ sont aussi des sommes simples, F est une fonction entière rationnelle de sommes simples. D'après le résultat immédiatement précédant la formule $F = 0$ reste valable, si l'on remplace toute somme simple par l'opérateur différentiel correspondant. Dans cette substitution on remplace la somme simple a_k par l'opérateur correspondant A_k , de sorte que le théorème d'isomorphie est démontré.